

УДК 621.97:531.3

С. Д. ГАРЦМАН, И. Н. СИЛЬВЕРСТОВ, кандидаты техн. наук; И. И. КАРПУХИН

Инженерный расчет коэффициента восстановления при ударе

Описана методика, позволяющая рассчитать коэффициент восстановления при прямом соударении двух твердых тел и определить закон изменения во времени силы удара, максимум и время действия ударной нагрузки.

There is described the technique enabling to calculate the restoration factor under direct impact of two solid bodies and to determine the pattern of impact force changing in time, maximum force and time of action of impact loading.

Для кузнечно-прессовых машин ударного действия (все типы молотов) актуальной задачей является расчет сил, которые действуют при ударе, и КПД ударного деформирования. Решение проблемы повышения надежности кузнечно-прессовых машин также связано с оценкой динамических нагрузок, возникающих в процессе эксплуатации. Во многих случаях основой для такой оценки является расчет коэффициента восстановления при прямом соударении двух твердых тел. Кроме того, представляет интерес определение закона изменения во времени силы удара и времени действия ударной нагрузки.

В ЗАО "Прочность" (ОАО "АХК ВНИИметмаш") разработана и реализована программой на ЭВМ математическая модель, позволяющая определить коэффициент восстановления и другие параметры процесса соударения.

Рассмотрен общий случай процесса прямого соударения двух твердых тел массами m_1 и m_2 и скоростями v_{01} и v_{02} в момент времени $t = 0$ начала соударения.

Согласно работам [1–3], при соударении формируется сила Q , изменяющаяся в промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ от нуля до максимальной величины Q_{\max} , а в промежутке времени $t_1 \leq t \leq t_{\max}$ от Q_{\max} до нуля. Для определения параметров процесса прямого соударения двух твердых тел, в частности, закона изменения во времени силы удара Q , сближения центров $X = X_1 - X_2$ тяжести масс

m_1 и m_2 , скоростей v_1 и v_2 и $v = v_1 - v_2$, необходимо решить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -Q, & \frac{dX}{dt} &= v, \\ X &= X_e + X_s, & \text{при } 0 \leq t \leq t_1; \\ X &= X_e + X_{s \max}, & \text{при } t_1 \leq t \leq t_{\max}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{1 + m_1/m_2}$; X_e, X_s — упругая и пластическая составляющие общего сближения масс; $X_e = \left(\frac{Q}{K}\right)^r$; $X_s = \left(\frac{Q}{\theta}\right)^p$; $X_{s \max}$ — остаточная деформация, равная X_s при $Q = Q_{\max}$;

$X_{s \max} = \left(\frac{Q_{\max}}{\theta}\right)^p$; K, θ, r и p — коэффициенты, характеризующие зависимость упругой и пластической составляющих деформации от силы.

Начальными условиями решения системы уравнений (1) при $t = 0$ являются $v_0 = v_{01} - v_{02}$; $X_0 = 0$. При этом $v_{01} > v_{02}$. Коэффициенты K, θ, r и p определяются теоретически или экспериментально и зависят, в частности, от материала и формы поверхностей тел в зоне контакта. При соударении металлических сфер или сферы с плоскостью $r = 2/3$ и $p = 1$ [1, 4].

Согласно работам [1, 3], связь между смещением X и силой Q можно представить в виде графиков (рис. 1). Без учета пластических деформаций увеличение и уменьшение силы Q будет характеризоваться кривой 1. С учетом

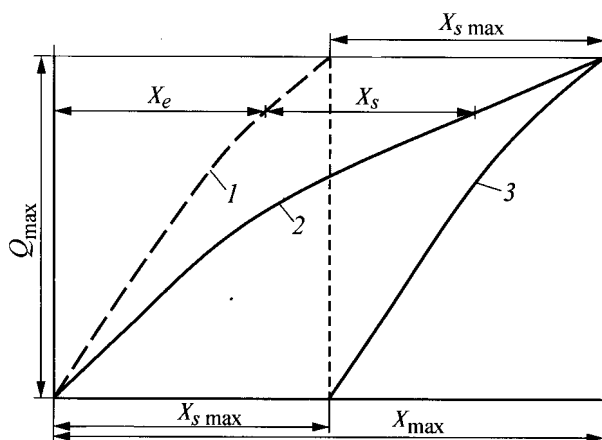


Рис. 1. Зависимость действующей силы от сближения центров масс:

1 — без учета пластической деформации; 2 и 3 — с учетом пластической деформации на участках сближения и расхождения

пластических деформаций в промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ связь между силой Q и смещением X будет характеризоваться кривой 2, а при $t_1 \leq t \leq t_{\max}$ — кривой 3. Таким образом, в процессе формирования силы Q возникает отклонение от кривой 1 в виде петли гистерезиса, образованной кривыми 2 и 3.

Аналитическое решение системы уравнений (1) затруднено, поскольку в общем случае силу Q не удастся представить в виде явной функции от сближения X . Поэтому определение параметров процесса соударения в каждом конкретном случае, как, например, в работе [2], выполняется численными методами. При большом количестве варьируемых параметров это существенно затрудняет анализ полученных результатов. Для упрощения анализа целесообразно привести уравнения (1) к безразмерному виду. Для этого введены безразмерная сила q , безразмерное сближение α , безразмерная скорость сближения u и безразмерное время τ , связанные с размерными параметрами зависимостями:

$$q = \frac{Q}{Q_n}; \quad \alpha = \frac{X}{X_n}; \quad u = \frac{v}{v_n}; \quad \tau = \frac{t}{t_n},$$

где Q_n , X_n , v_n , t_n — соответствующие сила, нормирующее сближение, скорость сближения и время.

Принято, что $v_n = v_0$. Величина Q_n принята равной максимальному значению Q_{\max} ,

определенному из уравнения (1) при $X_s = 0$. На основе решения уравнений (1) получено

$$Q_n = \left(0,5mv_0^2 K^r \left(\frac{1+r}{r}\right)\right)^{\frac{1}{1+r}};$$

$$X_n = \left(0,5mv_0^2 K^{-1} \left(\frac{1+r}{r}\right)\right)^{\frac{r}{1+r}};$$

$$t_n = \frac{X_n}{v_0} = \left(0,5mv_0 \left(\frac{1+r}{r}\right)^{\frac{1-r}{r}} K^{-1} \left(\frac{1+r}{r}\right)\right)^{\frac{r}{1+r}}$$

Подставив в уравнение (1) соотношения, принятые между фактическими и безразмерными параметрами, и приняв во внимание, что $X_n = Q_n^r K^{-r}$, $Q_n X_n = 0,5mv_0^2 \left(\frac{1+r}{r}\right)$, получим следующие уравнения:

$$\frac{du}{d\tau} = \left(-0,5\frac{1+r}{r}\right)q, \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = u,$$

$$\alpha = \begin{cases} q^r + A_p q^p & \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_1; \\ q^r + A_p q_{\max}^p & \text{при } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_{\max}, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$A_p = \left\{ \left[\left(0,5mv_0^2 \frac{1+r}{r}\right)^{p-r} K^{r(1+p)} \right]^{\frac{1}{1+r}} \right\} \theta^{-p}. \quad (3)$$

Начальными условиями при $\tau = 0$ для решения системы уравнений (2) являются $u_0 = 1$, $\alpha_0 = 0$. При фиксированных величинах показателей степени r и p решение системы уравнений (2) определяется одним безразмерным параметром A_p . Из уравнений (1) и (2) следует, что безразмерная скорость при $\tau = \tau_{\max}$ равна:

$$u_k = -\frac{v_{k1} - v_{k2}}{v_{01} - v_{02}},$$

где v_{k1} и v_{k2} — соответственно скорости масс m_1 и m_2 в момент окончания соударения. Следовательно, выражение для u_k идентично выражению для коэффициента восстановления K_v (см. например работу [1]). Теоретически этот безразмерный параметр может изме-

няться от нуля до бесконечности. При $A_p = 0$ происходит абсолютно упругое соударение, при котором $K_v = 1$. По мере увеличения A_p влияние пластической составляющей на процесс соударения будет увеличиваться, что приведет к снижению K_v . При $A_p \rightarrow \infty$ коэффициент восстановления $K_v \rightarrow 0$.

Результаты расчета величин q_{\max} , τ_1 , τ_{\max} и K_v в функции от A_p , полученные путем решения уравнений (2) для часто встречающихся сочетаний $r = 2/3$ (теория Герца) и $p = 1$, приведены в таблице.

Установлено, что с достаточной для инженерных расчетов точностью закон изменения силы q во времени τ можно представить зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} q &= q_{\max} \sin(\pi\tau/2\tau_1) \text{ при } 0 \leq \tau \leq \tau_1, \\ q &= q_{\max} \cos[\pi(\tau - \tau_1)/(2(\tau_{\max} - \tau_1))] \\ &\text{при } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В качестве примера на рис. 2 для $A_p = 1$ приведен график безразмерной силы q в функции от безразмерного времени τ (1 — результат решения уравнений (2), 2 — результат приближенного расчета по уравнению (4), 3 — результат решения уравнения (2) без учета пластических деформаций). Сравнение кривых 1 и 2 свидетельствует об удовлетворительном соответствии точного и приближенного решений, а сравнение кривых 1 и 2 с кривой 3 — о существенном влиянии пластических деформаций на закон изменения во времени силы удара.

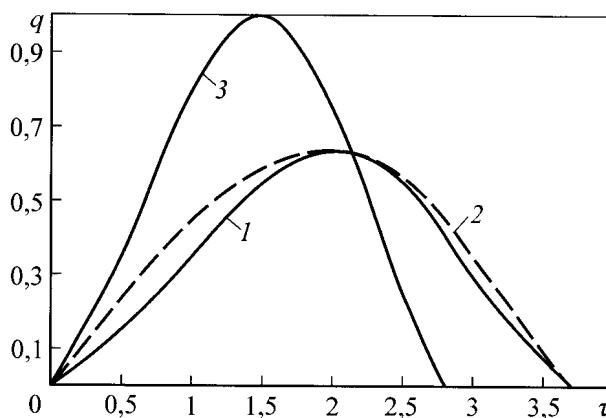


Рис. 2. График безразмерной силы q в функции безразмерного времени τ при $A_p = 1$:

1 — решение для уравнения (2); 2 — приближенное решение (уравнение (4)); 3 — решение для уравнения (2) без учета пластической деформации

На основе данных, приведенных в таблице, установлено, что с погрешностью, не превышающей 3% при $0 \leq A_p \leq 30$, а также при $r = 2/3$ и $p = 1$ коэффициент восстановления K_v можно представить зависимостью

$$K_v = (1,538A_p + 1)^{-0,4}. \quad (5)$$

Рассмотрен практически важный случай соударения упругого индентора с контртелом (упругопластической деталью). В зоне контакта с деталью индентор имеет сферическую поверхность, радиус кривизны которой равен R_1 . Радиус кривизны контртела значительно больше, чем радиус кривизны индентора. Из работы [1] следует, что $r = 2/3$ и

$$K = (4/3)R_1^{0,5} E_s, \quad (6)$$

A_p	q_{\max}	τ_1	τ_{\max}	K_v	A_p	q_{\max}	τ_1	τ_{\max}	K_v
0	1,00	1,47	2,94	1,00	6,0	0,33	3,74	5,63	0,40
0,2	0,88	1,61	3,13	0,90	8,0	0,29	4,17	6,16	0,36
0,4	0,80	1,71	3,29	0,83	10,0	0,27	4,58	6,63	0,33
0,6	0,73	1,81	3,44	0,77	20,0	0,19	6,46	8,51	0,25
0,8	0,68	1,99	3,57	0,73	30,0	0,16	7,82	9,95	0,21
1,0	0,64	2,01	3,69	0,69	40,0	0,14	8,63	11,14	0,20
2,0	0,52	2,47	4,21	0,58	50,0	0,12	9,70	12,23	0,18
4,0	0,40	3,19	5,00	0,46	—	—	—	—	—

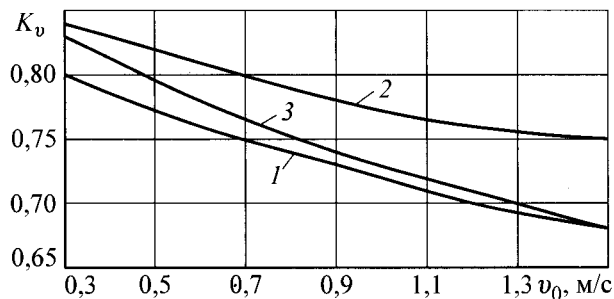


Рис. 3. Зависимость коэффициента восстановления K_v от начальной скорости соударения

где $E_s = E_1 E_2 [(1 - \mu_1^2) E_2 + (1 - \mu_2^2) E_1]^{-1}$, E_1 , E_2 , μ_1 и μ_2 — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов индентора и контртела.

Согласно работе [4], показатель степени $p = 1$ и

$$\theta = 2\pi R_1 \text{HB}, \quad (7)$$

где HB — твердость по Бринеллю.

С учетом формул (6) и (7) выражение (3) можно представить следующим образом:

$$A_p = 0,2095 m^{0,2} v_0^{0,4} R_1^{-0,6} E_s^{0,8} \text{HB}^{-1}. \quad (8)$$

Из выражений (5)—(8) следует, что величина K_v определяется твердостью HB , массами m_1 и m_2 , начальной скоростью v_0 и радиусом R_1 , обобщенной характеристикой E_s материалов контактирующих поверхностей индентора и контртела. При этом увеличение v_0 будет приводить к росту A_p , следовательно, к уменьшению K_v , что подтверждается многочисленными экспериментами [1, 2, 5].

В качестве примера определим коэффициент восстановления при следующих исходных данных: $m = m_1 = 64 \cdot 10^{-3}$ кг, $v_0 = 1,5$ м/с, $R_1 = 12,7 \cdot 10^{-3}$ м, $E_1 = 100 \cdot 10^3$ МПа, $E_2 = 210 \cdot 10^3$ МПа, $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, $\text{HB} = 1000$ МПа.

Подставив величины E_1 , E_2 , μ_1 и μ_2 в формулу (6), получим, что $E_s = 74,4 \cdot 10^3$ МПа. Из расчета по формуле (8) следует, что $A_p = 0,973$. Согласно уравнению (5) $K_v = 0,694$.

Аналогично приведенному примеру выполнены расчеты K_v для вариантов, когда v_0 изменяется в пределах 0,3...1,5 м/с. Результаты расчетов приведены на рис. 3 (кривая 1). Там же приведены результаты расчетов K_v для вариантов, когда $\text{HB} = 1500$ МПа (кривая 2). Кривая 3 построена на основе экспериментальных данных, приведенных в работе [5] и полученных при соударении стальной сферы диаметром $25,4 \cdot 10^{-3}$ м с чугуной плитой. Данные о твердости сферы и плиты в работе [5] отсутствуют, поэтому сравнение кривых 1 и 2 с кривой 3 носит условный характер.

Выводы. 1. Разработана методика, позволяющая рассчитать коэффициент восстановления при прямом соударении двух твердых тел, а также определить закон изменения во времени силы удара, максимум и время действия ударной нагрузки.

2. Показано, что учет пластических деформаций в зоне контакта соударяемых тел вносит существенные коррективы в результаты расчета.

3. В диапазоне скоростей соударения 0,3...1,5 м/с и твердости $\text{HB} = 1000...1500$ МПа результаты расчета удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Это позволяет рекомендовать предложенную методику расчета для применения в инженерной практике.

Список литературы

1. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. 224 с.
2. Маламент Л. И. Исследование поперечного удара с учетом упругопластического характера местной деформации металла // Вестник Военно-инженерной академии Красной Армии им. В. В. Куйбышева. Вып. 29. М.: Изд-во "ВИА", 1940. 72 с.
3. Гарцман С. Д. Анализ упругопластической модели и определение параметров процесса прямого соударения двух твердых тел // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 1. С. 16—19.
4. Зегжда С. А. Соударение упругих тел. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1997. 316 с.
5. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 44 с.